اثبات قضیه‌ی فری به روش اختلالی در مدل شوئینگر بدون جرم

معصومه قاسم‌خانی[۱]، پویک اسلامبولچی‌مقدم[۱]

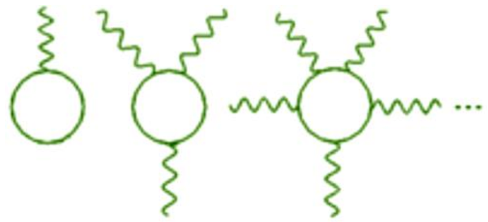
[۱] دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

یکی از مدل‌های مورد توجه در نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی مدل QED دو بعدی با صرف نظر از جرم فرمیون‌هاست که به مدل شوئینگر بدون جرم معروف است. از آن‌جا که تقارن مزدوج باری (C) به بعد فضا بستگی ندارد، لاگرانژی این مدل نیز همانند QED چهار بعدی تحت تبدیل C ناوردا است. از سوی دیگر وندل فری در سال ۱۹۳۷، با تکیه بر ناوردایی تقارن مزدوج باری در QED نشان داد که نمودارهای متشکل از تعداد فردی پای آزاد فوتونی، در دامنه‌ی فاینمن کل سهم ندارند.

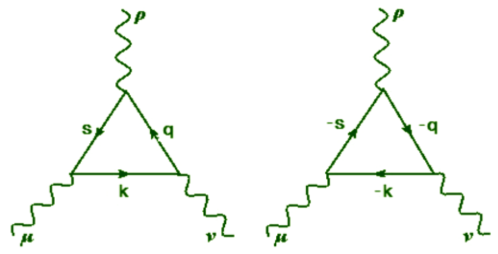
در این پوستر، دامنه‌ی فاینمن توابع ۳،۱ و۵-نقطه‌ای را در حد تک-حلقه در مدل شوئیگر بدون جرم به‌دست می‌آوریم؛ با توجه به ویژگی‌های خاص این مدل، قضیه‌ی فری را به روش اختلالی در حد تک‌حلقه برای هر تابع فرد-نقطه‌ای دلخواه اثبات می‌کنیم و نشان می‌دهیم که نتیجه‌ی حاصل به مراتب بالاتر حلقه نیز قابل تعمیم است.

توابع ۱-نقطه‌ای، ۳-نقطه‌ای و ۵-نقطه‌ای فوتون در حد تک-حلقه

- دامنه‌ی نخستین نمودار شکل زیر یعنی تنها نموداری که به تابع ۱-نقطه‌ای فوتون سهم می‌دهد، صفر است.



- دامنه‌ی تابع ۳-نقطه‌ای فوتون از دو نمودار مستقل از هم سهم می‌گیرد:



(a) (b)

$$\Xi^{\mu\nu\rho}_{(a)} = -(-ie)^3 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \mathrm{Tr}\left[\frac{i\not{k}}{k^2}\gamma^\nu \frac{i\not{q}}{q^2}\gamma^\rho \frac{i\not{s}}{s^2}\gamma^\mu\right]$$

$$= (-ie^3)(i)^3 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{k_\alpha q_\beta s_\lambda}{k^2q^2s^2} \mathrm{Tr}\left(\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\mu\right),$$

$$\Xi^{\mu\nu\rho}_{(b)} = -(-ie)^3 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \mathrm{Tr}\left[\frac{-i\not{s}}{s^2}\gamma^\rho \frac{-i\not{q}}{q^2}\gamma^\nu \frac{-i\not{k}}{k^2}\gamma^\mu\right]$$

$$= (ie^3)(-i)^3 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{k_\alpha q_\beta s_\lambda}{k^2q^2s^2} \mathrm{Tr}\left(\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu\right).$$

هر دو دامنه غیر صفر اند، اما در مجموع سهم هم را خنثی می‌کنند:

$$\Xi^{\mu\nu\rho}_{(a)} + \Xi^{\mu\nu\rho}_{(b)} = e^3 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{k_\alpha q_\beta s_\lambda}{k^2q^2s^2}$$

$$\times \left\{\mathrm{Tr}\left(\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\mu\right) - \mathrm{Tr}\left(\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu\right)\right\} = 0,$$

که در آن از اتحاد زیر استفاده شده‌است:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu^1}\gamma^{\mu^2}\cdots\gamma^{\mu^{m-1}}\gamma^{\mu^m}\right] = (-1)^m \mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu^m}\gamma^{\mu^{m-1}}\cdots\gamma^{\mu^2}\gamma^{\mu^1}\right].$$

- بنا بر قضیه‌ی ویک، نمودارهایی که به تابع ۵-نقطه‌ای فوتون سهم می‌دهند، نمودارهای متناظر با همه‌ی ادغام‌های ممکن در جمله‌ی مرتبه‌ی ۵-ام S-ماتریس هستند. پس از ادغام، ۲۴=!۴ نمودار فاینمن برای تابع ۵-نقطه‌ای فوتون در حد تک-حلقه به‌دست می‌آید که دو به دو قرینه‌ی یکدیگر اند.

به همین ترتیب، برای هر تابع (۲n+۱)-نقطه‌ای فوتون، به تعداد !(۲n) نمودار فاینمن تک-حلقه وجود دارد که معادل با جایگشت دوری این نقاط دول حلقه‌ی فرمیونی است.

تابع (۲n+۱)-نقطه‌ای فوتون در حد تک-حلقه

ناوردایی مدل شوئینگر بدون جرم تحت تقارن مزوج باری تضمین می‌کند که تعداد نمودارها در مراتب بالاتر نیز زوج است پس برای یافتن الگوی مناسب در هر مرتبه، کافی است تنها یک جفت نمودار قرینه‌ی هم را بررسی کنیم. برای این کار، توجه به چند نکته ضروری است:

بیست و نهمین کنفرانس بهاره فیزیک

۱. در همه‌ی نمودارها یک حلقه‌ی فرمیونی و درنتیجه یک تکانه‌ی داخلی مستقل (q) وجود دارد.

۲. اگر فرمیون‌ها جرم داشتند، در صورت هر انتشارگر یک جمله‌ی جرمی نیز ظاهر می‌شد که علامت آن با تغییر جهت تکانه‌ها تغییر نمی‌کرد و فاکتورگیری از ضریب $(-1)^{(2n+1)}$ ممکن نبود.

۳. تمام نمودارهای مورد نظر ما تک‌حلقه‌هایی با ۲n+۱ نقطه هستند. پس ۲n+۱ انتشارگر فرمیونی دارند. از سوی دیگر، در هر جفت نمودار متناظر با یک تابع، جهت انتشار فرمیون‌های یکی، مخالف دیگری است. بنابراین ۲n+۱ علامت منفی در یکی از دامنه‌ها ضرب می‌شود که بر اساس نکته‌ی ۲ قابل فاکتورگیری است.

۴. با معکوس کردن ترتیب چند ماتریس دیراک، در آن‌ها همواره برابر و هم علامت باقی می‌ماند. درنتیجه، علامت منفی بین دامنه‌های دو نمودار متناظر با یک تابع، پس از ردگیری تغییر نمی‌کند.

طبق این نکات، دامنه‌های یک تابع (۲n+۱)-نقطه‌ای به صورت زیر است:

$$\Xi^{\nu^1\cdots\nu^{2n+1}}_{(a)} = -i^{(2n+1)} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}$$
$$\times \mathcal{F}^{\nu^1\cdots\nu^{2n+1}}_{\mu^1\cdots\mu^m}(q)\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu^1}\gamma^{\mu^2}\cdots\gamma^{\mu^{m-1}}\gamma^{\mu^m}\right],$$

$$\Xi^{\nu^1\cdots\nu^{2n+1}}_{(b)} = -(-i)^{(2n+1)} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}$$
$$\times \mathcal{F}^{\nu^1\cdots\nu^{2n+1}}_{\mu^1\cdots\mu^m}(q)\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu^{m-1}}\cdots\gamma^{\mu^2}\gamma^{\mu^1}\gamma^{\mu^m}\right].$$

و قضیه‌ی فری در مدل شوئینگر بدون جرم در حد تک‌حلقه اثبات می‌شود: $\Xi^{\nu^1\cdots\nu^{2n+1}}_{(a)} + \Xi^{\nu^1\cdots\nu^{2n+1}}_{(b)} = 0$

تابع (۲n+۱)-نقطه‌ای در حد دو-حلقه و بالاتر

هر نمودار دو-حلقه‌ای و بالاتر از اتصال پاهای فوتونی در نمودارهای تک-حلقه به دست می‌آیر. با چنین اتصال‌هایی ساختار حلقه‌های فرمیونی تغییر نمی‌کند، اما تفاوت‌هایی نیز ایجاد می‌شود:

- پاهای فوتونی آزاد در نمودارهای تک-حلقه، پس از اتصال انتشارگرهای فوتونی را در دامنه وارد می‌کنند.
- افزایش تعداد حلقه‌ها (تکانه‌های داخلی)، در تعداد انتگرال‌ها و نوع انتگرال‌گیری تفاوت ایجاد می‌کند.

تأثیر این تفاوت‌ها در روند اثبات قضیه عبارت است از:

۵. انتشارگرهای فوتونی در رد ماتریس‌های دیراک وارد نمی‌شوند و تنها به صورت ضریب باقی می‌مانند. این ضرایب که تابعی از مجذور تکانه‌ی فوتون‌ها هستند، با تغییر جهت فرمیون‌ها تغییر علامت نمی‌دهند.

۶. دامنه‌های متناظر با هر تابع فرد-نقطه‌ای، پیش از انتگرال‌گیری یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین، تفاوت در تعداد یا نوع انتگرال‌ها تأثیری در نتیجه‌ی نهایی ندارد.

مراجع

Julian Schwinger, "Gauge Invariance and Mass", *Phys. Rev.* **125** (1962) 397.

Julian Schwinger, "Gauge Invariance and Mass II", *Phys. Rev.* **128** (1962) 2425.

R. Bufalo, M. Ghasemkhani, Z. Haghgouyan and A. Soto, "Induced Maxwell-Chern-Simons Effective Action in Very Special Relativity," *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 1129.

W. H. Furry, "A Symmetry Theorem in the Positron Theory," *Physical Review*. **51(2)** (1937) 125-129.